סכומים ישרים

יהי מ"ו V מעל שדה F.

1. יהיו $U, W \subset V$ תת-מרחבים. נגיד שהסכום

$$U + W := \{u + w \mid u \in U,\ w \in W\}$$

הוא <u>סכום ישר</u> אם לכל $v \in U + W$ קיים ייצוג **יחיד** $v = u + w,\ u \in U,\ w \in W$.
במקרה זה נסמן את הסכום כך: $U \oplus W$.

2. יהיו $U_1, U_2 \ldots, U_k \subset V$ תת-מרחבים. נגיד שהסכום

$$\sum_i U_i = U_1 + U_2 + \ldots + U_k := \left\{ \sum_i u_i \mid \forall i,\ u_i \in U_i \right\}$$

הוא <u>סכום ישר</u> אם לכל $v \in \sum_i U_i$ קיים ייצוג יחיד $v = \sum_i u_i$ כאשר $u_i \in U_i$ לכל i.
במקרה זה נסמן את הסכום כך: $\bigoplus_i U_i = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_k$.

תרגיל 1: יהי מ"ו V מעל שדה F, ויהיו $U_1, U_2 \ldots, U_k \subset V$ תת-מרחבים.
הסכום $\sum_i U_i$ הוא סכום ישר אם ורק אם לכל מתקיימת התכונה הבאה:
אם $u_1 + u_2 + \ldots + u_k = 0$ (כאשר $u_i \in U_i$ לכל i) אזי $u_1 = u_2 = \ldots = u_k = 0$.

טענה:
יהי מ"ו V מעל שדה F, ויהיו $U_1, U_2 \ldots, U_n \subset V$ תת-מרחבים.
לכל i, יהי $B_i \subset U_i$ בסיס בתת-מרחבים U_i. נסמן ב- $B := (B_1, B_2, \ldots, B_n)$ את השרשור של הרשימות ווקטורים $B_1, B_2, \ldots, B_n$ (ייתכנו חזרות ברשימה זו!).
מתקיים:
הרשימה B היא בסיס לתת-מרחבים $\sum_{i=1}^n U_i$ אם ורק אם הסכום $\sum_{i=1}^n U_i$ הוא סכום ישר.

תרגיל 2: יהי מ"ו V מעל שדה F.

1. יהיו $U, W \subset V$ תת-מרחבים. הראו כי הסכום $U + W$ הוא סכום ישר אם ורק אם $U \cap W = \{0\}$.

2. יהיו $U_1, U_2 \ldots, U_n \subset V$ תת-מרחבים. נניח כי הסכום $\bigoplus_{i=1}^n U_i$ הוא סכום ישר. הראו כי כל שניים מתת-מרחבים הנ"ל נחתכים רק בראשית, כלומר:

$$\forall\ i \neq j,\quad U_i \cap U_j = \{0\}.$$

3. האם הטענה ההופכית נכונה? כלומר, האם ההנחה $\forall\ i \neq j,\quad U_i \cap U_j = \{0\}$ גוררת שהסכום $\bigoplus_i U_i$ הוא סכום ישר?

תרגיל 3: יהי מ"ו V מעל שדה F. יהיו $U, W_1, W_2 \subset V$ תת-מרחבים. נתון כי $U \oplus W_1$, $U \oplus W_2$ הם סכומים ישרים. הוכיחו או הפריכו בעזרת דוגמא נגדית: אם $U \oplus W_1 = U \oplus W_2$ אז $W_1 = W_2$.